ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Математическое ожидание

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число, которое обозначается $M\xi$ и находится по формуле

$$\boxed{M\xi = \mu = \begin{cases} \sum\limits_i x_i p_i & \text{(для дискретной случайной величины);} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx & \text{(для непрерывной случайной величины).} \end{cases}}$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины ξ.

Свойства математического ожидания:

1. Если $\xi \equiv C$, то $M\xi = C$.

2. $M[C \cdot \xi] = C \cdot M\xi$.

3. $M[\xi \pm \eta] = M\xi \pm M\eta$.

4. $M[\xi \cdot \eta] = M\xi \cdot M\eta$, если ξ и η − независимые случайные величины (понятие независимых случайных величин будет дано позже).

5. Пусть ξ − случайная величина, а $\varphi(x)$ − числовая функция, тогда для математического ожидания случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$ имеет место формула

$$M\eta = M\left[\varphi(\xi)\right] = \begin{cases} \sum\limits_i \varphi(x_i) p_i; \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx. \end{cases}$$

В частности, $M[a\xi + b] = aM\xi + b$.

Дисперсия

Дисперсией случайной величины ξ называется число, которое обозначается $D\xi$ и находится по формуле

$$\boxed{D\xi = M\left[(\xi - M\xi)^2\right] = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - M\xi)^2 p_i; \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f(x)dx. \end{cases}}$$

Дисперсия является математическим ожиданием квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, то есть дисперсия − средний квадрат отклонения. Из определения дисперсии следует, что $D\xi \geq 0 \;\; \forall \xi$.

Свойства дисперсии:

1. Если $\xi \equiv C$, то $D\xi = 0$.

2. $D[\xi + C] = D\xi$.

3. $D[C \cdot \xi] = C^2 D\xi$.

4. $D[\xi \pm \eta] = D\xi + D\eta$, если ξ и η − независимые случайные величины. В частности, $D[a\xi + b] = a^2 D\xi$.

5. $D\xi = M[\xi^2] - (M\xi)^2$.

► $D\xi = M\left[(\xi - M\xi)^2\right] = M\left[\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2\right] =$

$$= M[\xi^2] - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 = M[\xi^2] - (M\xi)^2. \blacktriangleleft$$

Дисперсия случайной величины ξ является мерой рассеивания значений этой величины. Но дисперсия не всегда удобна, так как она имеет размерность квадрата случайной величины. Поэтому в качестве меры рассеивания применяют $\sqrt{D\xi}$.

Величина $\sqrt{D\xi}$ называется ***стандартным*** или ***средним квадратическим отклонением*** и обозначается σ_ξ, то есть

$$\boxed{\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}}.$$

ПРИМЕР 1. Дан ряд распределения

x_i	-2	-1	0	2	4
p_i	0,1	0,2	0,35	0,25	0,1

дискретной случайной величины ξ. Найти $M\xi, D\xi, \sigma_\xi$.

<u>Решение.</u>

$$M\xi = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = (-2)\cdot 0{,}1 + (-1)\cdot 0{,}2 + 0\cdot 0{,}35 + 2\cdot 0{,}25 + 4\cdot 0{,}1 = 0{,}5;$$

$$D\xi = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i - (M\xi)^2 = (-2)^2\cdot 0{,}1 + (-1)^2\cdot 0{,}2 +$$

$$+0^2\cdot 0{,}35 + 2^2\cdot 0{,}25 + 4^2\cdot 0{,}1 - 0{,}5^2 = 2{,}95.$$

Следовательно, $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} \approx 1{,}72$. ■

ПРИМЕР 2. Дана плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x<0,\ \ x>2, \\ x/2, & 0\le x\le 2, \end{cases}$$

непрерывной случайной величины ξ. Найти $M\xi, D\xi, \sigma_\xi$.

<u>Решение.</u>

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3};$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (M\xi)^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3 dx - \frac{16}{9} = \frac{2}{9},$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} \approx 0{,}16. ■$$

Случайная величина называется ***нормированной***, если ее математическое ожидание равно 0, а дисперсия равна 1.

Например, если ξ − произвольная случайная величина, то случайная величина $\tilde{\xi} = \dfrac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi}$ является нормированной, так как

$$M\tilde{\xi} = M\left[\frac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi}\right] = 0, \quad D\tilde{\xi} = D\left[\frac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi}\right] = 1.$$

Начальные и центральные моменты

Начальным моментом порядка k случайной величины ξ называется число, которое обозначается μ_k и находится по формуле

$$\boxed{\mu_k = M[\xi^k] = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^k p_i & \text{(для дискретн. случайной величины);} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx & \text{(для непрер. случайной величины).} \end{cases}}$$

Очевидно, что $\mu_1 = M\xi$.

Центральным моментом порядка k случайной величины ξ называется число, которое обозначается ν_k и находится по формуле

$$\boxed{\nu_k = M\left[(\xi - M\xi)^k\right] = \begin{cases} \sum\limits_i (x_i - \mu)^k p_i; \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k f(x)dx. \end{cases}}$$

Заметим, что всегда $\nu_1 = 0$, так как $\nu_1 = M(\xi - \mu) = \mu - \mu = 0$, а $\nu_2 = D\xi$.

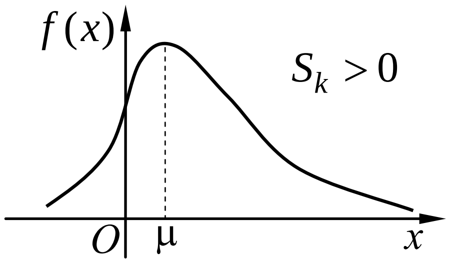
Коэффициент асимметрии и эксцесс

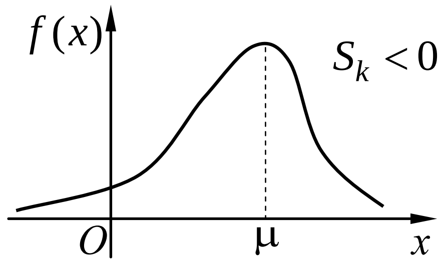
Центральный момент 3-го порядка ν_3 характеризует степень симметричности распределения относительно среднего значения. Если распределение симметрично, то $\nu_3 = 0$.

Так как ν_3 имеет размерность куба случайной величины, то рассматривают безразмерный ***коэффициент асимметрии***

$$\boxed{S_k = \frac{\nu_3}{\sigma_\xi^3}}$$

Если $S_k > 0$, то говорят о положительной асимметрии, если $S_k < 0$ – об отрицательной.

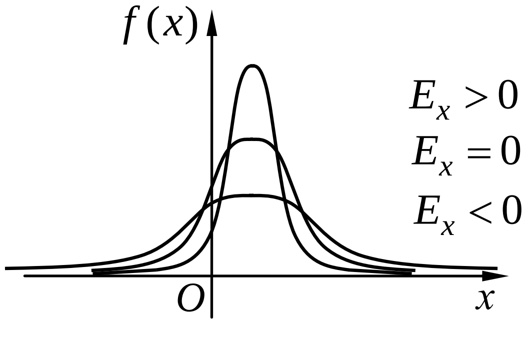




Эксцессом случайной величины ξ называется величина

$$\boxed{E_x = \frac{\nu_4}{\sigma_\xi^4} - 3}$$

Эксцесс вводится для непрерывных случайных величин и характеризует вершину графика плотности распределения. Если $E_x > 0$, то вершина графика плотности более острая, а если $E_x < 0$ – более плоская, чем у графика плотности нормально распределенной случайной величины. Для нормального распределения $E_x = 0$. (Нормальное распределение будет рассмотрено позже.)



Мода и медиана

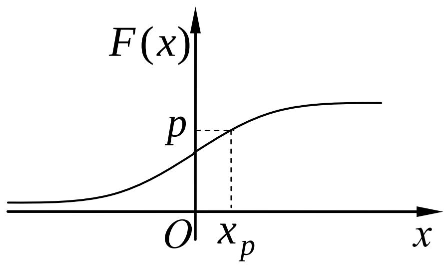
Мода Mo случайной величины ξ − это наиболее вероятное значение этой случайной величины.

Предположим, что возможные значения дискретной случайной ξ расположены в порядке возрастания, тогда модой Mo этой случайной величины является такое ее значение x_k, для которого

$$P\{\xi = x_k\} \geq P\{\xi = x_{k-1}\}, \qquad P\{\xi = x_k\} \geq P\{\xi = x_{k+1}\}.$$

Для непрерывной случайной величины ξ мода Mo − точка локального максимума плотности распределения $f_\xi(x)$.

Если мода единственна, то распределение случайной величины называется ***унимодальным***, в противном случае – ***полимодальным***.



Квантиль уровня p $(0 < p < 1)$ случайной величины ξ − это такое значение $x = x_p$, для которого выполняется равенство

$$F_\xi(x_p) = p, \text{ то есть } P\{\xi < x_p\} = p.$$

Медианой Me случайной величины ξ называется квантиль $x_{0,5}$. Медиана Me удовлетворяет условию

$$P\{\xi < Me\} = P\{\xi > Me\} = 0{,}5.$$

В случае непрерывной случайной величины ξ это условие означает, что прямая $x = Me$ делит площадь под кривой плотности $f_\xi(x)$ пополам.

ОСНОВНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Биномиальное распределение

Пусть случайная величина ξ − число успехов в серии из n испытаний Бернулли с вероятностью успеха в каждом испытании p, тогда ξ принимает значения $0,1,...,n$ с вероятностями

$$\boxed{P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},\ \ k = 0,1,...,n,\ \ 0 < p < 1,\ \ q = 1 - p}$$

Такое распределение называется ***биномиальным***, так как выражения $C_n^k p^k q^{n-k}$ являются слагаемыми в разложении $(p+q)^n$ по формуле бинома Ньютона

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q + C_n^2 p^{n-2}q^2 + ... + C_n^k p^k q^{n-k} + ... + q^n.$$

Биномиальное распределение задается двумя параметрами n и p.

Так как $p + q = 1$, то $\sum\limits_{k=0}^{n} P\{\xi = k\} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1.$

Числовые характеристики биномиального распределения:

$$\boxed{M\xi = np, \quad D\xi = npq, \quad \sigma_\xi = \sqrt{npq}}$$

► Действительно, пусть случайная величина ξ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ – число успехов в i-м испытании Бернулли, тогда для ξ_i имеем

ξ_i	0	1
P	q	p

$$M\xi_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,$$

$$D\xi_i = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Так как $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, а случайные величины ξ_i независимы, то

$$M\xi = M\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M\xi_i = np; D\xi = D\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i = npq. ◄$$

Найдем **наивероятнейшее значение** (моду) k_0 случайной величины ξ. Так как

$$\frac{P\{\xi = k+1\}}{P\{\xi = k\}} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{n-k}{k+1},$$

то справедлива рекуррентная формула

$$P\{\xi = k+1\} = P\{\xi = k\} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{n-k}{k+1}.$$

Поскольку для моды k_0 справедливы неравенства:

$$P\{\xi = k_0\} \ge P\{\xi = k_0 + 1\}, \quad P\{\xi = k_0\} \ge P\{\xi = k_0 - 1\}$$

то, используя первое из них и рекуррентную формулу, получаем

$$P\{\xi = k_0\} \ge P\{\xi = k_0 + 1\} = P\{\xi = k_0\} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{n-k_0}{k_0+1},$$

откуда

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{n-k_0}{k_0+1} \le 1 \quad \Rightarrow \quad k_0 \ge pn - q.$$

Аналогично, используя второе неравенство и рекуррентную формулу, можно показать, что $k_0 \le pn + p$.

Итак, наивероятнейшее значение k_0 случайной величины ξ удовлетворяет неравенству

$$\boxed{pn - q \le k_0 \le pn + p}$$

ПРИМЕР 1. Проводятся 15 испытаний Бернулли с вероятностью успеха в каждом испытании $p = 0,3$. Найти наивероятнейшее число успехов.

Решение. В нашем случае $n = 15$, $p = 0,3$, $q = 0,7$. Неравенству $4,5 - 0,7 \le k_0 \le 4,5 + 0,3$ удовлетворяет $k_0 = 4$.■

Распределение Пуассона

Случайная величина ξ имеет ***распределение Пуассона*** с параметром a, если она принимает счетное число значений $0,1,2,\ldots,n,\ldots$ с вероятностями

$$\boxed{P\{\xi = k\} = \frac{a^k \cdot e^{-a}}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n,\ldots}$$

Распределение Пуассона определяется одним параметром a.

Для распределения Пуассона имеем:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k e^{-a}}{k!} = e^{-a} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = \left\langle e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right\rangle = e^{-a} e^a = 1.$$

Числовые характеристики распределения Пуассона:

$$\boxed{M\xi = a, \quad D\xi = a}$$

►Действительно:

$$M\xi = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{a^k e^{-a}}{k!} = a e^{-a} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = a e^{-a} e^a = a;$$

$$M[\xi^2] = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot \frac{a^k e^{-a}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k(k-1) + k) \cdot \frac{a^k e^{-a}}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \cdot \frac{a^k e^{-a}}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{a^k e^{-a}}{k!} = a^2 e^{-a} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a^{k-2}}{(k-2)!} + a = a^2 + a;$$

$$D\xi = M[\xi^2] - (M\xi)^2 = a^2 + a - a^2 = a. \blacktriangleleft$$

Простейший поток событий

Потоком событий называется последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени.

Поток событий называется ***простейшим*** (***пуассоновским***), если выполняются следующие условия:

за малый промежуток времени появление более одного события практически невозможно (ординарность);

появление событий на произвольном временном промежутке $[t_1, t_2]$ не зависит от поведения потока до момента времени t_1 (отсутствие последствия);

появление того или иного числа событий на произвольном временном промежутке $[t_1, t_2]$ зависит только от длины этого промежутка и не зависит от его начала (стационарность).

Интенсивностью потока λ называется среднее число событий в единицу времени.

Вероятность появления k событий простейшего потока за время T находится по формуле

$$P(k) = \frac{a^k \cdot e^{-a}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \quad a = \lambda T.$$

ПРИМЕР 2. За год в среднем происходит 3 сбоя аппаратуры. Какова вероятность того, что за 2 года будет не более 4 сбоев?

<u>*Решение.*</u> Так как $\lambda = 3(1/\text{год})$ и $T = 2$ года, то $a = \lambda T = 3 \cdot 2 = 6$. Тогда для искомой вероятности имеем:

$$P\{0 \le k \le 4\} = \sum_{k=0}^{4} \frac{a^k \cdot e^{-a}}{k!} = \sum_{k=0}^{4} \frac{6^k \cdot e^{-6}}{k!} \approx$$

$$\approx 0,0025 + 0,0149 + 0,0446 + 0,0892 + 0,1339 = 0,2851. \blacksquare$$

Геометрическое распределение

Случайная величина ξ имеет ***геометрическое распределение***, если она принимает счетное число значений: $0,1,2,\ldots,n,\ldots$ с вероятностями

$$\boxed{P\{\xi = k\} = q^k p, \quad k = 0,1,2,\ldots,n,\ldots, \quad q = 1 - p}$$

Ряд распределения имеет вид

x_i	0	1	2	$\ldots$	n	$\ldots$
p_i	p	qp	$q^2 p$	$\ldots$	$q^n p$	$\ldots$

Легко видеть, что указанные вероятности являются членами геометрической прогрессии со знаменателем прогрессии q.

Геометрическое распределение определяется одним параметром p.

Геометрическое распределение имеет, например, случайная величина ξ, равная числу испытаний в схеме Бернулли, проведенных до первого успеха, с вероятностью успеха в каждом испытании p.

Для геометрического распределения справедливо:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k p = p \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \langle 0 < q < 1 \rangle = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1.$$

Числовые характеристики геометрического распределения:

$$\boxed{M\xi = \frac{q}{p}, \quad D\xi = \frac{q}{p^2}}$$

►Действительно:

$$M\xi=\sum_{k=0}^{+\infty}kp_k=\sum_{k=0}^{+\infty}kq^k p=pq\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}=pq\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{pq}{p^2}=\frac{q}{p};$$

$$M[\xi^2]=\sum_{k=0}^{+\infty}k^2q^k p=\sum_{k=1}^{+\infty}(k(k-1)+k)q^k p=\sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)q^k p+$$

$$+\sum_{k=0}^{+\infty}kq^k p=pq^2\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)q^{k-2}+\frac{q}{p}=pq^2\frac{2}{(1-q)^3}+\frac{q}{p}=\frac{2q^2}{p^2}+\frac{q}{p};$$

$$D\xi=M[\xi^2]-(M\xi)^2=\frac{2q^2}{p^2}+\frac{q}{p}-\frac{q^2}{p^2}=\frac{q^2+pq}{p^2}=\frac{q(q+p)}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$$

Ряды $\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$ и $\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)x^{k-2}=\frac{2}{(1-x)^3}$ получены при почленном дифференцировании ряда $\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=\frac{1}{1-x},|x|<1.$◄

ПРИМЕР 3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле $p=0,2$. Найти среднее число выстрелов до первого попадания.

<u>Решение.</u> Среднее число выстрелов до первого попадания есть математическое ожидание случайной величины, имеющей геометрический закон распределения с параметром $p=0,2$, то есть

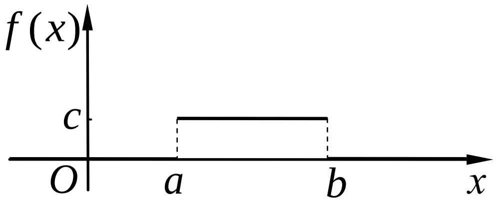
$$M\xi=\frac{q}{p}=\frac{1-0,2}{0,2}=\frac{0,8}{0,2}=4.$$■

ОСНОВНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Равномерное распределение

Непрерывная случайная величина ξ имеет ***равномерное распределение*** на отрезке $[a,b]$, если ее плотность распределения постоянна на этом отрезке, то есть

$$\boxed{f(x)=\begin{cases} c, & x\in[a,b]; \\ 0, & x\notin[a,b]. \end{cases}}$$



Из условия нормировки получаем

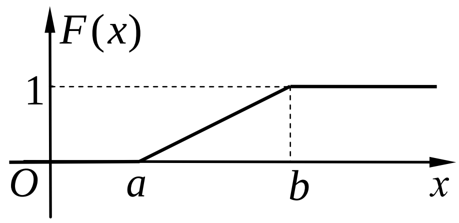
$$1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{a}^{b} cdx=c(b-a) \quad \Rightarrow \quad \boxed{c=\frac{1}{b-a}}.$$

Найдем функцию распределения случайной величины ξ:

$$\forall x\in[a;b] \quad \Rightarrow \quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{a}^{x}\frac{dt}{b-a}=\frac{t}{b-a}\bigg|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Таким образом,

$$\boxed{F(x)=\begin{cases} 0, & x<a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b; \\ 1, & x>b. \end{cases}}$$



$$\boxed{M\xi=\frac{a+b}{2}, \quad D\xi=\frac{(b-a)^2}{12}}$$

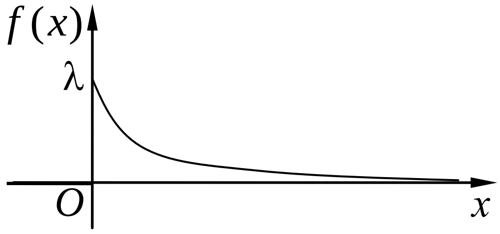
Равномерный закон определяется двумя параметрами a и b.

Равномерный закон распределения имеют, например, случайные величины: время ожидания транспорта, курсирующего с фиксированным интервалом; ошибки округления и т.п.

Показательное (экспоненциальное) распределение

Случайная величина ξ имеет ***показательное распределение*** с параметром λ $(\lambda > 0)$, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}}$$

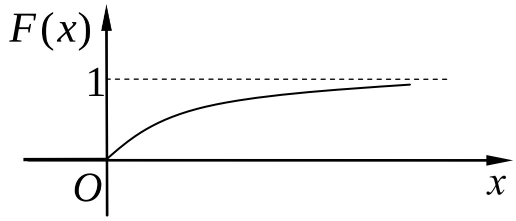


Так как при $x > 0$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}dt=-e^{-\lambda t}\Big|_0^x=1-e^{-\lambda x},$$

то

$$\boxed{F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}}$$



Числовые характеристики показательного распределения:

$$\boxed{M\xi=\frac{1}{\lambda},\quad D\xi=\frac{1}{\lambda^2}}$$

►Действительно:

$$M\xi=\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\underbrace{-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}}_{=0}+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda},$$

$$M[\xi^2]=\int_0^{+\infty} x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\underbrace{-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}}_{=0}+\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2},$$

$$D\xi=M[\xi^2]-(M\xi)^2=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.◄$$

Показательное распределение определяется одним параметром λ.

Показательный закон распределения имеют следующие случайные величины: длительность безотказной работы прибора, время обслуживания или ремонта, время ожидания и т.п.

Пусть случайная величина ξ – время безотказной работы прибора. ***Функцией надежности*** $R(t)$ будем называть вероятность безотказной работы за время *t*, то есть

$$R(t) = P\{\xi > t\} = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

Замечание. Между показательным распределением и распределением Пуассона есть связь. Если среднее время безотказной работы $M\xi = \dfrac{1}{\lambda}$, то $\lambda = \dfrac{1}{M\xi}$ – среднее число отказов в единицу времени.

ПРИМЕР 1. Время безотказной работы прибора (измеряется в часах) подчинено показательному закону распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0,6e^{-0,6x}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти среднее время безотказной работы и вероятность того, что за 5 часов будет не более одного отказа.

Решение. Пусть ξ – время безотказной работы прибора. Так как $\lambda = 0,6$, то среднее время безотказной работы

$$M\xi = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,6} \approx 1,67.$$

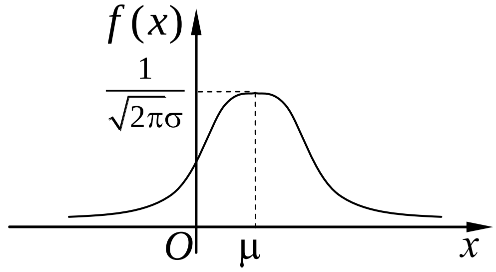
Пусть η – число отказов за время t, тогда $P(\eta = k) = \dfrac{a^k e^{-a}}{k!}$, где $a = \lambda t$. В нашем случае $t = 5,\ a = \lambda t = 0,6 \cdot 5 = 3$, тогда

$$P(\eta \le 1) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = \frac{4}{e^3} \approx 0,1991. \blacksquare$$

Нормальное распределение

Случайная величина ξ имеет ***нормальное распределение*** с параметрами μ, $\sigma>0$ (обозначение $\xi\in N(\mu,\sigma^2)$), если ее плотность распределения имеет вид

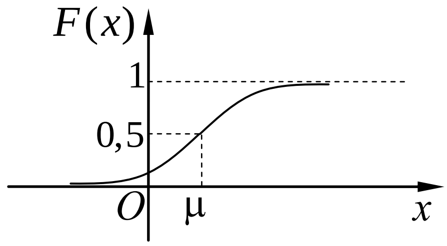
$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$



где $-\infty<x<+\infty$.

Функция распределения:

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt}$$



Числовые характеристики нормального распределения:

$$\boxed{M\xi=\mu=Mo=Me,\quad D\xi=\sigma^2,\quad S_k=0,\quad E_x=0}$$

►Докажем, что $J=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$ (интеграл Пуассона):

$$J^2=J\cdot J=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy=$$

$$=\left\langle\begin{matrix}\text{в полярной}\\ \text{системе коорд.}\end{matrix}\right\rangle=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho d\rho=-2\pi e^{-\rho^2/2}\Big|_0^{+\infty}=2\pi.$$

Тогда для математического ожидания имеем

$$M\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\left\langle t=\frac{x-\mu}{\sigma}\right\rangle=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{=\sqrt{2\pi}} + \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{=0} = \mu .$$

Аналогично можно показать, что $D\xi = \sigma^2$. ◀

Коэффициент асимметрии $S_k = \frac{\nu_3}{\sigma_\xi^3}$ нормально распределенной случайной величины равен нулю в силу симметрии распределения.

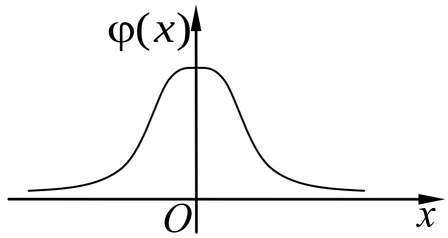
Эксцесс $E_x = \frac{M[(\xi - M\xi)^4]}{\sigma^4} - 3$ также равен нулю.

Стандартное нормальное распределение

Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

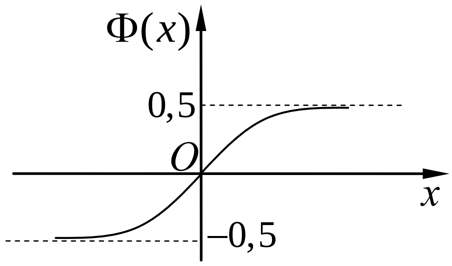
Плотность и функция распределения имеют вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Для $F_0(x)$ справедливы формулы:



$$F_0(-x) = 1 - F_0(x);$$

$$F_0(x) = 0{,}5 + \Phi(x) .$$

Напомним, что $\varphi(x)$ − функция Гаусса, а $\Phi(x)$ − функция Лапласа, для которых составлены таблицы значений.

Пусть $\xi \in N(\mu, \sigma^2)$. Найдем вероятность попадания случайной величины ξ в промежуток $[a, b]$:

$$P\{a \le \xi \le b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\langle t = \frac{x-\mu}{\sigma} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{a-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= F_0\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

Итак, для нормально распределенной случайной величины $\xi \in N(\mu, \sigma^2)$ имеем

$$\boxed{P\{a \le \xi \le b\} = F_0\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F_0\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}$$

ПРИМЕР 2. Дальномер имеет систематическую ошибку 0,1 м и среднюю квадратическую ошибку 0,4 м. Полагая, что ошибки измерений подчиняются нормальному закону распределения, найти вероятность того, что ошибка измерения не превысит 0,5 м.

Решение. Ошибка измерения ξ имеет нормальный закон распределения с параметрами $\mu = 0{,}1$ и $\sigma = 0{,}4$. Тогда

$$P\left\{|\xi| < 0{,}5\right\} = P\{-0{,}5 < \xi < 0{,}5\} = \Phi\left(\frac{0{,}5 - 0{,}1}{0{,}4}\right) - \Phi\left(\frac{-0{,}5 - 0{,}1}{0{,}4}\right) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1{,}5) = \Phi(1) + \Phi(1{,}5) \approx 0{,}3413 + 0{,}4332 \approx 0{,}7745. \blacksquare$$

Для вероятности попадания в интервал, симметричный относительно математического ожидания, имеем

$$P\{|\xi-\mu|<l\}=P\{\mu-l\le\xi<\mu+l\}=$$

$$=\Phi\left(\frac{\mu+l-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-l-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-l}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right).$$

Итак,

$$\boxed{P\{|\xi-\mu|<l\}=2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right)}$$

Полагая в последней формуле $l=\sigma$, $l=2\sigma$ и $l=3\sigma$, получим

$$P\{|\xi-\mu|<\sigma\}=2\Phi(1)\approx 0,6827,$$

$$P\{|\xi-\mu|<2\sigma\}=2\Phi(2)\approx 0,9545,$$

$$P\{|\xi-\mu|<3\sigma\}=2\Phi(3)\approx 0,9973.$$

Мы нашли вероятности попадания случайной величины ξ в интервалы $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$, $(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$, $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$.

Можно сделать вывод о том, что случайная величина $\xi\in N(\mu,\sigma^2)$ принимает свои значения в трехсигмовом интервале $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ практически достоверно («***правило трех сигм***»). Таким образом, «правило трех сигм» позволяет с вероятностью, близкой к единице, определить реальный интервал изменения случайной величины (теоретически $-\infty<x<+\infty$).

ПРИМЕР 3. Дано: $\xi\in N(4,9)$. Определить симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,8 попадает ξ.

Решение. Так как $\mu=4$, $\sigma=3$, то

$$P\{|\xi-4|<l\}=2\Phi\left(\frac{l}{3}\right)=0,8,$$

$$\Phi\left(\frac{l}{3}\right)=0,4 \quad\Rightarrow\quad \frac{l}{3}\approx 1,28 \quad\Rightarrow\quad l\approx 3,84.$$

Итак, искомый интервал $(0,16;7,84)$.■

ПРИМЕР 4. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали ξ, которая распределена по нормальному закону с математическим ожиданием (проектная длина) 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей находится в пределах от 47 мм до 53 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали не менее 48 мм и не более 50 мм.

Решение. Из условия задачи следует, что $(47;53)$ − это трехсигмовый интервал, то есть $\sigma=1$. Таким образом, $\xi\in N(50;1)$ и

$$P\{48<\xi<50\}=\Phi\left(\frac{50-50}{1}\right)-\Phi\left(\frac{48-50}{1}\right)=\Phi(0)+\Phi(2)\approx 0,4772.■$$

Нормальный закон играет очень важную роль в теории вероятностей. Он является предельным законом, к которому при определенных условиях приближаются другие распределения. Нормальный закон используется при анализе и прогнозировании различных экономических, социальных, демографических явлений. Нормальное распределение имеют, например, ошибки измерений, рост человека, ошибки стрельбы, величина износа деталей в механизмах и т.п.